ECOLE POLYTECHNIQUE — OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1982

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 heures)

Pour toute série S à termes complexes a_n $(n \in \mathbb{N})$, on note $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ la somme partielle de rang n et $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k$ la moyenne arithmétique des $n+1$ premières sommes partielles.

Dans l'ensemble des séries S, on envisage les sous-ensembles :

δ_1 constitué des séries S convergeant dans $\mathbb{C}$;

δ_2 constitué des séries S telles que la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$;

δ_3 constitué des séries S telles que la série entière de coefficients a_n ait un rayon de convergence au moins égal à 1 et que de plus sa somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ définisse sur $]-1, 1[$ une fonction f ayant dans $\mathbb{C}$ une limite, notée ℓ, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

I

1°/ Etudier, du point de vue de l'appartenance à δ_1, δ_2 et δ_3, la série S_1 de terme général $a_n = (-1)^n$.

2°/ Etudier, du point de vue de l'appartenance à δ_1, δ_2 et δ_3, la série S_2 de terme général $a_n = (-1)^{n+1} n$.

3°/ Etablir l'inclusion $\delta_1 \subset \delta_2$.

4°/ Soit $S \in \delta_2$.

a) Etablir la convergence pour tout $x \in]-1, 1[$ de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \sigma_n x^n$ puis de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n$. En déduire une expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ à l'aide de la somme $g(x)$ de la première de ces séries entières.

b) Montrer que S appartient à δ_3 et que, lorsque x tend vers 1, f a pour limite la limite σ de la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5°/ Résumer, en termes d'inclusions entre δ_1, δ_2 et δ_3, les résultats obtenus jusqu'ici. Comment ces résultats se modifient-ils si l'on se restreint aux séries S à termes a_n positifs ou nuls ?

II

Dans cette partie, on considère une série S fixée, *appartenant à* δ_3, de terme général *réel* a_n et telle qu'il existe un réel A vérifiant l'inégalité $n a_n \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, tous les polynômes envisagés seront à coefficients réels. Enfin, dans le calcul de x^n pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on conviendra que $0^0 = 1$.

1°/ a) Soit $p(X) = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k X^k$ un polynôme de valuation strictement positive

.../...

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n p(x^n)$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$ et calculer, lorsque x tend vers 1, la limite de sa somme à l'aide de ℓ et d'une valeur prise par p en un point qu'on précisera.

b) Soit $q(X) = \sum_{k=0}^{d'} \beta_k X^k$ un polynôme. Monter que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n)$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$ et calculer, lorsque x tend vers 1, la limite de $(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n)$ à l'aide d'une intégrale portant sur q.

2°/ On *admet* que pour toute fonction φ numérique continue sur $[0, 1]$ il existe une suite de polynômes convergeant vers φ uniformément sur $[0, 1]$. En déduire que pour toute fonction ψ numérique continue sur $[0, \frac{1}{2}[$ et $[\frac{1}{2}, 1]$ et admettant une limite à gauche au point $\frac{1}{2}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes q_1 et q_2 tels que $q_1(x) \leqslant \psi(x) \leqslant q_2(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ avec $\int_0^1 [q_2(x) - q_1(x)]\,dx \leqslant \varepsilon$.

3°/ Soit χ la fonction égale à 1 sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et nulle sur $[0, \frac{1}{2}[$.

a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n)$ converge uniformément sur tout intervalle compact inclus dans $[0, 1[$.

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux polynômes p_1 et p_2, de valuations strictement positives, tels que $p_1(1) = p_2(1)$ et que $p_1(x) \leqslant \chi(x) \leqslant p_2(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ avec $\int_0^1 \frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)}\,dx \leqslant \varepsilon$.

c) Etablir que pour x appartenant à $[0, 1[$ et assez proche de 1, les différences

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_2(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n)$$

sont toutes deux majorées par $(A + 1)\varepsilon$, et en déduire la convergence de la série S.

d) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n)$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

4°/ a) Soit S_3 une série appartenant à δ_3, de terme général réel b_n et telle qu'il existe un réel B vérifiant l'inégalité $nb_n \geqslant B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série S_3 converge-t-elle ?

b) Existe-t-il une telle série S_3, qui vérifie en outre la condition $\sup_{n \in \mathbb{N}} nb_n = +\infty$?

c) Soit S_4 une série appartenant à δ_3, de terme général complexe c_n et telle qu'il existe un réel C vérifiant l'inégalité $|nc_n| \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série S_4 converge-t-elle ?

d) Existe-t-il une série S_5 appartenant à δ_1, de terme général réel d_n et telle que $\sup_{n \in \mathbb{N}} n d_n = -\inf_{n \in \mathbb{N}} n d_n = +\infty$?

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail